Profesora Zygmunta Zahorskiego „wykład” o pochodnych – przygotowany do publikacji przez sprawcę zamieszania Romana Witułę

Zygmunt Zahorski
Roman Wituła – komentarze i uwagi

Pani profesor Janinie Śladkowskiej-Zahorskiej
– chciałem złożyć szczere wyrazy wdzięczności za pomoc:
w zgromadzeniu bibliografii i uzupełnieniu faktografii.

Panu profesorowi Jerzemu Mioduszewskiemu
(opiekunowi całego przedsięwzięcia)
***podziękowania** za tradycyjnie ogromny:*
zapał i zaangażowanie,
a także inspirującą dyskusję i dodatkową literaturę,
które pozwoliły nadać pracy ostateczny kształt.

Wstęp

Problem, a raczej pytanie, z jakim zwróciłem się do profesora Zahorskiego zimą 1986/87, dotyczyło dosyć ogólnie przeze mnie rozumianego „opisu” mnogościowo-topologicznego pochodnych. Byłem wówczas świeżo upieczonym magistrem matematyki i moja wiedza w tym temacie była raczej „standardowa”.

Po krótkim okresie czasu profesor przekazał mi list – odpowiedź, z którym postanowiłem podzielić się wreszcie z innymi, mam nadzieję, że równie ciekawymi jego treści jak ja wówczas.

Uwaga. Na marginesach odpowiednich stron zamieszczone są komentarze uzupełniające i uaktualniające wybrane treści z listu profesora. Ponadto, po liście profesora zamieszczono jeszcze zestaw kilku dłuższych informacji uzupełniających oraz bibliografię.

Roman Wituła
Institute of Mathematics, Silesian University of Technology, Kaszubska 23, 44-100 Gliwice, Poland, e-mail: roman.witula@polsl.pl

R. Wituła, D. Słota, W. Hołubowski (eds.), *Monograph on the Occasion of 100th Birthday Anniversary of Zygmunt Zahorski.* Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2015, pp. 67–80.

List Profesora

Zob. pracę [56].

Otóż, moja praca z Transaction of the American Mathematical Society wydrukowana w roku 1950, a zrobiona w zasadzie w latach 1939-42, zaczyna się słowami „charakteryzacja przy pomocy własności topologicznych i metrycznych klasy funkcji ciągłych, mających wszędzie pierwszą pochodną, nie jest znana”. Nie ważne tu, czy charakteryzować funkcję ciągłą, czy jej (na ogół w wielu punktach nieciągłą) pochodną. Ja dążyłem do charakteryzacji pochodnej wszędzie istniejącej. Przeciwnie niż w przypadku funkcji analitycznych, tu trudniejsze są funkcje nieograniczone, więc postawiłem takie etapy: I – pochodna ograniczona, II – pochodna skończona, III – pochodna (w niektórych punktach) nieskończona – znany był od dawna (ale chyba > 1900) dowód, że tych ostatnich musi być zbiór miary 0, więcej, ma to miejsce bez założeń istnienia pochodnej (w innych punktach), a nawet nie potrzeba ciągłości, zaś pochodną wystarczy rozważać jednostronną: zbiór wszystkich punktów, w których istnieje prawostronna pochodna nieskończona dowolnej funkcji (nawet niemierzalnej) jest miary Lebesgue'a 0.

Jest to wynik Banacha [7].

Co do dowodu tego faktu, to wynika on, przykładowo, z oryginalnego dowodu Weierstrassa nieróżniczkowalności tej funkcji, zamieszczonego po raz pierwszy w liście Weierstrassa do Du Bois Raymonda (1875). W tym temacie wydaje się być jeszcze istotne tw. Banacha (1931), którego treść przytoczymy w punkcie 3 informacji uzupełniających na końcu pracy.

Dla funkcji ciągłej Weierstrassa nigdzie nieróżniczkowalnej, w każdym punkcie jedna pochodna Diniego $= +\infty$, inna $-\infty$, ale pochodne Diniego nie są pochodnymi, podobnie jak granica górna i dolna ciągu nie są (na ogół) granicą ciągu.

Jeśli idzie o pochodną prawie wszędzie istniejącą (tj. z wyjątkiem zbioru punktów miary $(\mathcal{L})\,0$) problem jest łatwiejszy i został rozwiązany w roku 1912 (a wydrukowany w 1915 czy 1916), w pracy doktorskiej Łuzina po rosyjsku („Całka i szereg trygonometryczny”), co do nazwy – to również za czasów carskich doktorat był w Rosji II stopniem naukowym, odpowiadającym naszej habilitacji. Prace habilitacyjne są zresztą wszędzie różne, nawet na tej samej uczelni – ta była epokowa, nie z tym jednym problemem, ponadto postawiono tam kilka innych problemów, co najmniej jedna hipoteza (że szereg Fouriera funkcji całkowalnej z kwadratem jest zbieżny prawie wszędzie), po przykładach Kołmogorowa z roku 1922 szeregu Fouriera funkcji całkowalnej w I potędze, rozbieżnego prawie wszędzie – drukowane w polskim czasopiśmie Fund. Math. chyba w 1923 i takiegoż szeregu też dla funkcji z L^1, rozbieżnego wszędzie, 1926, druk. w C. R. Akademii Paryskiej w tymże roku, hipoteza Łuzina stała się mało prawdopodobną. Tak wybitny specjalista w szeregach trygonometrycznych jak Antoni Zygmund mówił w roku 1960, że to na pewno jest fałszywe, bo w L^2 typową jest zbieżność w metryce L^2 (twierdzenie Riesza-Fischera 1904) a nie prawie wszędzie. Mieńszow podał przed 1936 przykłady układów ortogonalnych ograniczonych z rozbieżnością pr. wsz. w L^2, a Kołmogorow postawił więcej niż hipotezę w 1926, wydrukowaną w 1927 w niemieckim czasopiśmie Mathematische Zeitschrift (w pracy wspólnej z Mieńszowem), że może to być nawet układ trygonometryczny, ale odpowiednio przestawiony. Mianowicie napisał, że umie podać taki przykład, ale nie podał tam, ani nigdzie później dowodu, ani funkcji – lub co równoważne, współczynników szeregu, ani sposobu przestawienia wyrazów (permutacji w ciągu nieskończonym). Wielu matematyków (rosyjskich, węgierskich, amerykańskich i zapewne innych) próbowało to zrobić, udało mi się to w roku 1960, może po trzech tygodniach pracy (i trochę w 1954), ale przydała mi się do tego wieloletnia bezskuteczna praca

Zob. prace [33, 55]

właśnie nad hipotezą Łuzina. W 1954, też dość szybko, zdawało mi się, że mam konstrukcję, ale zauważyłem błąd przed samym referatem na PTM, referat, co prawda, zrobiłem, ale z rzeczy całkiem innej i znanej, choć nie wszystkim uczestnikom – o tzw. twierdzeniu Younga o symetrii (dla dowolnej funkcji punktu na osi x o wartościach liczbowych, zbiory granic $f(x_n)$ prawostronnych, gdy $x_n \to x$, $x_n > x$ i lewostronnych, $x_n < x$, są identyczne i jedna z nich $= f(x)$, czy wszędzie? Nie koniecznie, ale z wyjątkiem zbioru x-ów najwyżej przeliczalnego – to lepiej niż miary 0.

Zapewne chodzi tu o tw. pani G. C. Young, zob. [47, 17] (podobny błąd rodzajowy występuje w „nieśmiertelnej” monografii [38], gdzie na str. 181 powinno być „Twierdzenie Denjoy-Young-Saksa” oraz „Twierdzenie Sierpińskiego-Young”.

Skrócony, ale jasny dla specjalistów dowód, oczywiście z funkcją i permutacją, zgłosiłem w 1960 w C. R. Acad. Paris (drukują w ciągu trzech tygodni, ale 1–5 stron, anonsy bez dowodu lub bardzo skrócone dowody).

Profesorowi Zygmundowi, który był wtedy parę dni w Warszawie (stale mieszka w Chicago), powiedziałem, że od 1945 roku wierzę w hipotezę Łuzina i nie wprawia mnie w wątpliwość prawdziwość hipotezy Kołmogorowa, że dla układu przestawionego może być inaczej, a w normalnym porządku $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ właśnie tak, jak przewidywał Łuzin. Czego anons ogłosiłem w 1961 roku też w C. R. Acad. Paris, ale przed zredagowaniem na czysto i zreferowaniem w Instytucie PAN w Warszawie u prof. S. Mazura – zmarł w listopadzie 1981 roku. W czasie redagowania znalazłem błąd, zawiadomiłem Mazura, a że notę w C. R. już wydrukowali, ogłosiłem w Math. Reviews za pośrednictwem prof. Zygmunda, że rozwiązania nie ma, omyłka. Tym niemniej hipoteza Łuzina okazała się prawdziwą, udowodnił to w roku 1966 szwedzki matematyk L. Carleson, chyba z 10 lat młodszy ode mnie. Pracował podobno ok. 7 lat w dobrych warunkach – na amerykańskim stypendium na Uniwersytecie Stanforda w Kalifornii. Miał jeden z głównych referatów na międzynarodowym Kongresie w Moskwie w 1966, przewodniczył na tym referacie Kołmogorow. Sam Łuzin nie dożył dowodu swojej hipotezy, zmarł w Moskwie 28 lutego 1950.

Zob. pracę [58].

Zob. pracę [18].

A oto wynik Łuzina (udowodniony konstrukcyjnie w wyżej wymienionej jego pracy – zrobiono przedruk w 1950 roku z różnymi komentarzami i pracami autorów dających rozwiązania niektórych problemów Łuzina lub podobnych; miałem tę książkę, ale zginęła w czasie przeprowadzki do Gliwic w 1970 roku).

Zob. pracę [39].

Na to, aby $g(x)$ była prawie wszędzie pochodną funkcji ciągłej potrzeba i wystarcza, aby $g(x)$ była mierzalna $(\mathcal{L})$ i prawie wszędzie skończona.

Dowód tego tw. można znaleźć także w monografii [14].

Jednak owej funkcji ciągłej Łuzin nie nazywa pierwotną czy całką nieoznaczoną funkcji g. Bo jest wysoki stopień nieoznaczoności – różne funkcje „pierwotne” nie różnią się o stałą. Wprawdzie jedną z „pierwotnych” konstruuje, ale to wcale nie jest jednoznaczne. Korzysta w tym ze swojego twierdzenia, że dla funkcji mierzalnej na odcinku istnieje zbiór domknięty miary różniącej się o mniej niż ε od długości tego odcinka (ale oczywiście na ogół mniejszą niż ta długość), na którym f jest relatywnie ciągła; można, opuszczając punkty izolowane, mówić, że jest to zbiór doskonały, to jest domknięty i w sobie gęsty.

Ktoś referował ten wynik na moim seminarium na Uniwersytecie Łódzkim, tym niemniej niewiele pamiętam i jeślibym nawet potrafił zrekonstruować funkcję „pierwotną” Łuzina, to zajęłoby mi to ze trzy miesiące czasu solidnej roboty. Idzie to jakimiś funkcjami określanymi na zbiorach podobnych do zbioru Cantora, ale dodatniej miary. Konieczność tych warunków jest względnie łatwa: prawie wszędzie skończona, bo pochodna, jak wyżej zaznaczyłem, może być $+\infty$ lub $-\infty$ tylko na zbiorze miary 0.

Pierwszy przykład funkcji, których różnica nie jest stała na danym przedziale, ale mających wszędzie w tym przedziale równe pochodne podał Hans Hahn [27]. Inny przykład takich funkcji podał S. Ruziewicz (zob. [45, 46]).

A mierzalność p.w. pochodnej funkcji ciągłej (a nawet każdej z czterech pochodnych Diniego) udowadnia się dość łatwo, chyba nawet bez założenia ciągłości, pisałem coś o tym w Roczniku PTM (Annales) w roku 1952, ale niezbyt pamiętam co, było to zapewne wtedy nowe. Przy okazji: jeśli nawet pochodna istnieje wszędzie, to gdy np. jest $= +\infty$ na zbiorze mocy continuum tr~~ó~~udno (czemu było ó, chyba z pośpiechu, wprawdzie ortografii nie szanuję, ale i nie zwalczam) mówić o funkcji pierwotnej, np. dość łatwo jest zrobić dwie funkcje ciągłe, mające wszędzie równe pochodne, skończone poza zbiorem Cantora, $+\infty$ na zbiorze Cantora, nieróżniące się o stałą. Wszelkie uogólnienia funkcji pierwotnej, np. w drugiej połowie „Zarysu teorii całki" Saksa [47] (wydanie polskie 1930, francuskie – przekład, różniący się tylko jednym rozdziałem w samym środku, zaś angielskie, chyba z 1937 zupełnie inne i obszerniejsze, nieznane mi bliżej, bo nie znam angielskiego), zakładają zawsze, że pochodna jest niemal wszędzie skończona, to jest z wyjątkiem zbioru co najwyżej przeliczalnego, a prawie wszędzie znaczy z wyjątkiem zbioru miary 0 – który jak wiadomo może być nieprzeliczalny, a nawet mocy continuum. Nie dlatego, żeby pochodna musiała być niemal wszędzie skończona, jak widać ze wspomnianego przykładu ze zbiorem Cantora, lecz dlatego, że inaczej trudno mówić o funkcjach pierwotnych różniących się o stałą, jest to warunek wystarczający, a mniej krępującego nie znam.

Chodzi zapewne o pracę [57].

Wersja angielska monografii Saksa to [47]. Profesor Zahorski odwołuje się tu oczywiście do polskiej wersji [48] tej książki.

Przy tym gdy pochodna jest ograniczona, do znalezienia funkcji pierwotnej wystarcza całka Lebesgue'a. Nawet gdy pochodna nie istnieje na zbiorze mocy continuum; trzeba tylko, aby istniała prawie wszędzie, bo funkcja spełniająca warunek Lipschitza – nawet mocniej, różnica dwóch funkcji monotonicznych – ciągłych lub nie – ma prawie wszędzie pochodną skończoną całkowalną ($\mathcal{L}$), choć ta całka (jako funkcja górnej granicy) na ogół różni się od funkcji różniczkowalnej o dwa składniki – tzw. funkcję nieciągłości – tu są one I rodzaju i tylko dla takich się ją określa, oraz – nawet gdy jest ciągła, o tzw. funkcję osobliwości. Dopiero gdy jest absolutnie ciągła (nie chodzi o $|f|$, choć gdy f jest absolutnie ciągła, to $|f|$ też), to funkcja osobliwości jest $= 0$ dla każdego x. Ale funkcje Lipschitza są absolutnie ciągłe, a całka funkcji mierzalnej ograniczonej oczywiście spełnia warunek Lipschitza, przy tym każda funkcja mierzalna ograniczona jest całkowalna ($\mathcal{L}$) (po odcinkach długości skończonej), więc też wszystko się zgadza.

Niektóre funkcje nieograniczone też są całkowalne ($\mathcal{L}$), oczywiście spośród funkcji mierzalnych ($\mathcal{L}$) i zawsze, obojętnie czy f jest ograniczona czy nie, a nawet dla funkcji nieskończonych na zbiorze mocy continuum i miary 0 (gdyby był miary > 0, to całka $\mathcal{L}$ nie istnieje), jest $\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x)$ prawie wszędzie. Całki ($\mathcal{L}$) dotyczy pierwsza połowa wyżej wym. „Zarysu teorii całki" Saksa. Druga połowa dotyczy całek znacznie ogólniejszych niż Lebesgue'a, mianowicie Perrona i Denjoy. Bo niestety, gdy $f'(x)$ jest nieograniczona, nawet wszędzie istniejąca i wszędzie skończona (oczywiście mierzalna) może nie być całkowalną ($\mathcal{L}$). Wtedy, z całek oznaczonych $\int\limits_a^x f'(t)dt = F(x)$, rozwiązuje sprawę dopiero wyższa całka Denjoy, równoważna całce Perrona, czego dowód jest w II połowie Zarysu Saksa. Całki te były zdefiniowane nie tylko niezależnie, ale zupełnie inaczej i dopiero później inni autorzy udowodnili dwa twierdzenia – chyba I, że definicja (węższa) Denjoy obejmuje całkę Perrona, a II – że i na odwrót. Definicje opisowe Denjoy są podobne do opisowej definicji Lebesgue'a, z tą różnicą że zamiast pojęcia funkcji absolutnie ciągłej, AC, używa się ACG (abs. ciągłe uogólnione) w definicji węższej całki $\mathcal{D}$, zaś ACG* (abs. ciągłe uog. w sensie szerszym) w definicji szerszej całki $\mathcal{D}^*$. W definicji $\mathcal{D}$ używa się pochodnej aproksymatywnej, dla $\mathcal{D}^*$ – zwykłej (dla $*$ „powinno" być bardziej udziwnione, ale tutaj jest tradycyjnie na odwrót). Definicja opisowa jest jednak nie wiele warta bez konstruktywnej, bo nie gwarantuje istnienia rzeczy definiowanych, a ta jest dla całek $\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}^*$ „przerażająca", są to właściwie konstrukcje całek coraz wyższych klas porządkowych skończonych lub przeliczalnych (podobnie jak hierarchia funkcji Baire'a i zbiorów Borela) wychodząc od całki Lebesgue'a jako nr 0. Otóż przejścia do wyższych klas odbywają się przy pomocy 1) procesu Cauchy'ego – robienia całek niewłaściwych dla punktów izolowanych. Wiadomo, że całka $\mathcal{L}$ obejmuje całkę $\mathcal{R}$. Ale tylko właściwą, lub niewłaściwą bezwględnie zbieżną. Warunkowo zbieżna całka niewłaściwa $\mathcal{R}$ wychodzi poza całkę $\mathcal{L}$ (ale mieści się w I klasie całek $\mathcal{D}$); 2) procesu Harnacka – który wolę pominąć, wtedy, kiedy przeszkadza całkowalności w niższej klasie zbiór doskonały nigdziegęsty, taki że w przedziałach jego dopełnienia całkowalność jest, a w całym odcinku (z nich złożonym plus ów zbiór nigdziegęsty) – nie ma. Ale po samym tym zbiorze też jest. Perron obszedł to zupełnie inaczej, przez tzw. funkcje zwyższające i zniżające, chyba coś analogicznego jest w równaniach różniczkowych zwyczajnych, którymi się też zajmował, zresztą szukanie funkcji pierwotnej jest najprostszym równaniem różniczkowym – tyle że tam nie brak innych komplikacji, więc aby nie było ich za dużo, zakłada się ciągłość pochodnej, nieładnie powiedziane, szuka się rozwiązań o klasie C_1, z pochodną ciągłą.

Rosjanie nazywają szerszą całkę Denjoy całką Chinczina, który podał taką definicję niemal jednocześnie, ok. 1916. W pisowni zagranicznej figuruje on jako Khintchine, diabli wiedzą jakiej narodowości, kiedy to zwyczajnie Хинчин. Ale nie wiem, czy znaczenie słowa jest takie samo jak po polsku, bo po rosyjsku chińczyk to kitajec.

Całki Perrona i Denjoy (węższa) służą nie tylko do szukania funkcji pierwotnych dla pochodnych istniejących wszędzie, lub (w klasie ACG) prawie wszędzie, zresztą istnieją funkcje mierzalne niecałkowalne nawet w sensie Denjoy szerszym, lecz do szukania całek oznaczonych funkcji całkowalnych w tym sensie, przy tym $\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x)$ prawie wszędzie dla całki węższej, $\frac{d}{dx}$ apr. dla szerszej, obie dają dla $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)$ zwykłą ciągłość względem x, a nawet więcej – ACG lub ACG*. Całka Denjoy szersza daje pierwotną od pochodnej aproksymatywnej, co lepiej pominąć.

Nawiasem mówiąc, Denjoy zdefiniował pewną całkę oznaczoną wychodzącą poza $\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}^*$ specjalnie dla szeregów trygonometrycznych. Definicji tej nie znam, nigdy jej nie widziałem i wątpię, czy potrafiłbym rozwiązać ten problem (który być może ma więcej niż jedno rozwiązanie – np. czy każda definicja szersza byłaby dobra, węższa raczej nie, ale i to wątpliwe). O problemie tym wspomina i Łuzin w swojej pracy doktorskiej, ale go nie rozwiązał i może – nie pamiętam – szkicowo tylko sprecyzował. Chodzi o to:

Załóżmy, że szereg trygonometryczny $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ jest wszędzie zbieżny do funkcji skończonej $f(x)$, oczywiście I kl. Baire'a. Według twierdzenia dowiedzionego jeszcze przez Cantora w 1870 roku, współczynniki a_n, b_n są określone jednoznacznie przez funkcję f (ściślej Cantor dowiódł, że gdy $f(x) = 0$ dla każdego x, to wszystkie $a_n, b_n = 0$, co oczywiście równoważne – ale dowód choć tzw. elementarny

Autorem owych „Zasad ...” jest Gerhard Kowalewski (1876-1950). Zobacz też punkt 4 informacji uzupełniających.

nie jest zbyt łatwy – jest on np. w „Zasadach rachunku różniczkowego i całkowego” S. Kowalewskiego, Niemca, w przekładzie I. Rolińskiego. Gdy w roku 1928 w VII klasie podstawówki czytałem Kowalewskiego, nie wiedziałem że nieboszczyka Rolińskiego poznam osobiście po roku 1948, w Łodzi; był to zasłużony nauczyciel szkół średnich i popularyzator, oraz jak widać tłumacz, po wojnie prof. Wyż. Szk. Pedag., a po przyłączeniu jej do Uniw. Łódzkiego również prof. U.Ł., własnych wyników nie miał, ale był to całkiem fajny gość, zrównoważony, mądry, z humorem i tzw. dobrymi manierami, nie despotyczny względem studentów i pracowników niższej rangi, no i szwagier ówczesnego biskupa łódzkiego Rozwadowskiego). Problem: jak zdefiniować całkę, aby współczynniki a_n, b_n dawały się wyznaczyć znanymi wzorami Eulera-Fouriera z całką według tej definicji?

Zob. także punkt 5 informacji uzupełniających.

Po Cantorze uogólniano to twierdzenie o jednoznaczności, najpierw gdy wiadomo, że $f(x) = 0$ z wyjątkiem zbioru najwyżej przeliczalnego, że nie można było rezygnować ze zbioru miary > 0 to jasne, ale przy zbiorach miary 0 wyszły kłopoty – dla jednych, tzw. U, twierdzenie było prawdziwe, dla innych, M, fałszywe.

Co do zbiorów U oraz M, to proponujemy zaglądnąć do [59, 9] oraz [32].

Istnieje angielskie tłumaczenie, zob. [9].

Szereg prac o zbiorach U (unicite – jednoznaczność) i M napisali A. Rajchman, doc. Uniw. Warsz., zabity w Dachau chyba w 1941, Zygmund, pani N. Bari, Rosjanka o francuskim czy włoskim nazwisku, autorka monografii o szeregach tryg. konkurencyjnej z monografią Zygmunda, ale po rosyjsku – nie wiem, czy amerykanie ją przetłumaczyli, sama autorka w roku 1961, mając lat 60 i prawie niewidoma, ale często chcąca chodzić bez prowadzenia, w czasie Zjazdu Matem. (krajowego) w Leningradzie wlazła pod tramwaj czy pociąg elektryczny, no i przede wszystkim Mieńszow, chyba jeszcze żyje, ale lat ma co najmniej 85.

Wiadomo, że gdy f jest całkowalna ($\mathcal{L}$), to współczynniki wyrażają się całkami ($\mathcal{L}$), więc w szczególności gdy całkowalna ($\mathcal{R}$) – całkami ($\mathcal{R}$). Ale co będzie, gdy f nie jest całkowalna ($\mathcal{R}$)? Denjoy podał ok. 1923 roku potrzebną tu definicję całki (i udowodnił wzory). Czy dotyczą one i wyjątku przeliczalnie wielu punktów – nie wiem, a nieprzeliczalne groziłyby czymś gorszym może niż zbiory M, co nie znaczy że nie trzeba próbować. Przypuszczam, że do dziś nie jest znana charakteryzacja zbiorów U (miary 0) lub co równoznaczne, zbiorów M miary 0, sam się tą problematyką nie zajmowałem.

Zob. punkt 2 informacji uzupełniających.

Sam Euler swoje wzory udowadniał, ale gruntownie błędnie, o co nie można mieć pretensji, ani nie było porządnej definicji całki, a nawet pochodnej (= iloraz „nieskończenie małych” przyrostów, mówiono wtedy, nie stosując pojęcia granicy) ani wystarczająco szerokiego pojęcia funkcji (wprowadził je Dirichlet w 1837 roku i podobno jednocześnie Łobaczewski) – pierwszą porządną definicję całki oznaczonej podał Cauchy i to tylko dla funkcji ciągłych, po roku 1800, a Riemann przeniósł ją ok 1850 na te funkcje nieciągłe, dla których się da stosować, od czasów Lebesgue'a scharakteryzowanych jako ograniczone i prawie wszędzie ciągłe. Euler był ścisły w pracach z teorii liczb całkowitych, zaś w analizie, wtedy z konieczności nieścisłej, zrobił bardzo dużo i miał nosa – uzyskiwał wyniki na ogół poprawne mimo nieścisłości, pierwszorzędna intuicja. Wobec błędności jego dowodu teoria szeregów tryg. poszła w 2 kierunkach: 1) rezygnacja z dowodu, co można poprawnie zrobić przez przeniesienie do definicji: szereg z tak obliczanymi przy pomocy funkcji f współczynnikami nazywany szeregiem Fouriera funkcji f (tradycyjnie nazwy bywają niesłuszne; szeregi Fouriera wprowadził ten autor w 1822 w książce o równaniu przewodnictwa ciepła (cząstkowym), d'Alembert przed 1800 rozważając (też różniczkowe cząstkowe) równanie drgań struny, zaś Euler

Bardzo dobrymi nawiązaniami do historii szeregów Fouriera i zagadnienia „pierwszeństwa” są prace [28, 12, 20, 60].

ok. 1750 rozważając zjawisko okresowe np. astronomiczne; czyli Euler najwcześniej, Fourier najpóźniej), nie troszcząc się (jak chciał Euler), czy jest zbieżny i to właśnie do f. Nie oznacza to wykręcenia się sianem od problemu, tylko przenosi się on gdzie indziej – później można badać, czy jest on zbieżny do f i nawet jeśli nie, to jak z niego znaleźć f – np. okazało się (dowód Lebesgue'a), że tzw. pierwsze średnie arytmetyczne sum częściowych dążą prawie wszędzie do f i to w L^1 – wcześniej Fejer udowodnił to w punktach ciągłości, i jednostajną zbieżność I średnich na całej osi x, gdy f jest wszędzie ciągła i okresowa z okresem 2π; obydwa te twierdzenia należą do analizy elementarnej, rzecz w tym, że funkcja z L^1 może nie mieć ani jednego punktu ciągłości, ale prawie wszystkie punkty są jej tzw. punktami Lebesgue'a – definicję pomijam i w nich właśnie jest ta zbieżność. W L^2 ma miejsce (dla każdego rozwinięcia ortogonalnego, nie tylko tryg.) zbieżność w sensie odległości całkowej $\to 0$, tj. w metryce przestrzeni Hilberta L^2, wtedy wprawdzie ciąg sum częściowych jest tylko zbieżny wg miary (def. pomijam), a nie prawie wszędzie, ale można z niego wyjąć podciąg zbieżny prawie wszędzie – w układzie tryg. było dawno wiadomo, że wystarczy tu S_{2^n}, teraz (od 1966) wiadomo, że ... sam S_n, tj. cały ciąg S.

Chodzi tu o wynik L. Carlesona [18]. Więcej informacji można znaleźć w [29] (zob. również [10, 11, 26, 22]).

Drugi kierunek poszedł w stronę jednoznaczności. Przecież Riemann zrobił właściwie poprawny dowód twierdzenia Eulera i to dla najprostszej funkcji, równej wszędzie 0, bo nawet dla takiej brakowało i ten Eulera byłby i tu błędny. Ostatnie słowo dotąd stanowi wspomniana praca Denjoy. On sam zmarł niedawno w wieku lat 90, ostatnio widziałem go w Bułgarii (Warna) w 1967.

Klasy $\mathbf{M_k}$ i $\mathcal{M}_\mathbf{k}$ zwane są, co oczywiste, klasami Zahorskiego; z kolei prof. Zahorski użył litery $\mathbf{M}$ (odp. $\mathcal{M}$) od inicjału imienia swojej ówczesnej sympatii.

Teraz znów powrót do właściwego tematu. Otóż w wymienionej na początku pracy [56] zdefiniowałem 6 klas zbiorów $\mathbf{M_k}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$ i 5 klas funkcji $\mathcal{M}_\mathbf{k}$, $k = 1, 2, \ldots, 5$, oraz klasę $\mathbf{J}$ = funkcje I kl. Baire'a przechodzące w każdym przedziale przez wszystkie wartości pośrednie, co nazywa się własnością Darboux. Mają ją (analiza elementarna) wszystkie funkcje ciągłe, ale nie tylko – mają ją i funkcje aproksymatywnie ciągłe, też nie tylko – również pochodne istniejące wszędzie, nawet jeśli nie są apr. ciągłe. Dla pochodnych dowód jest łatwy. Wystarczy dowieść, że gdy $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$, (lub odwrotnie), $a < b$, to istnieje $\xi \in (a, b)$, że $f'(\xi) = 0$. Zupełna analogia z twierdzeniem Rolle'a, dziwne że wiele podręczników anal. elementarnej to pomija. W rozważanym przypadku wziąć max absolutne f w $[a, b]$, nie może być przyjęte ani w a, ani w b, więc w ξ wewnątrz. Ale wtedy $f'(\xi) = 0$ (często nazywane twierdzeniem Fermata w analizie – oczywiście jego twierdzenie, że każda liczba naturalna jest sumą co najwyżej czterech kwadratów liczb naturalnych jest dużo efektowniejsze). W przypadku gdy odwrotnie, należy rozważać minimum absolutne.

Piękne wykorzystanie własności Darboux dla pochodnych znaleźć można w pracy [54]. Otóż udowodniono tam „równoważność” fundamentalnego twierdzenia rachunku całkowego oraz twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

Równie łatwe jest należenie do I kl. Baire'a. Gdy $f'(x)$ istnieje wszędzie, to $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n(f(x+\frac{1}{n})-f(x))$, a funkcje $f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n})-f(x))$ są, przy każdym ustalonym n, ciągłe. Te dwie konieczne własności pochodnej istniejącej wszędzie były oczywiście od dawna znane. Lebesgue podał bardzo prosty przykład, że one nie charakteryzują pochodnej: funkcje $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$ obie są I kl. Baire'a z własnością Darboux, gdyby więc były pochodnymi (i to jak widać ograniczonymi), to pochodną byłaby też funkcja $f(x) - g(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x = 0 \\ 0 \text{ dla } x \neq 0 \end{cases}$ co niemożliwe, bo nie ma własności Darboux. A więc f, lub g, (lub obie) nie jest pochodną. Funkcja $f - g \in$ I kl., co musi oczywiście mieć miejsce. Przykład ten zacytowałem, bo w dalszym ciągu jego niewielkie modyfikacje służą mi do innych (też łatwych) kontrprzykładów. Bezpośredni dowód, że f nie jest pochodną, byłby niewiele trudniejszy, ale po co. Otóż znane jest od dawna niezbyt trudne twierdzenie, że $f \in$ I kl., gdy dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiory $\{x : f(x) > a\}$ i $\{x : f(x) < a\}$ są klasy F_σ. Nawet wystarczy to wiedzieć dla gęstego na osi y zbioru wartości a, choćby przeliczalnego. Dlatego zbiory wszystkich moich klas należą do klasy F_σ, zbiór pusty zaliczam do nich wszystkich, aby nie robić wyjątków (nie można zaprzeczyć, że nie należy, tzw. prawdziwość w sposób pusty). Niebanalna jest definicja, dopiero gdy zbiór jest niepusty. Jest $\mathbf{M_0} \supset \mathbf{M_1} \supset \mathbf{M_2} \supset \mathbf{M_3} \supset \mathbf{M_4} \supset \mathbf{M_5}$ i wszystkie te zawierania oznaczają część właściwą (co podaję przed definicją, ale uzasadnić można dopiero po definicji). Def. $E \in \mathbf{M_0}$, gdy każdy punkt $x \in E$ jest obustronnym punktem skupienia dla E; $E \in \mathbf{M_1}$, gdy każdy $x \in E$ jest obustronnym punktem kondensacji dla E, tj. w każdym jednostronnym sąsiedztwie x, $(x-\delta, x)$ oraz $(x, x+\delta)$, $\delta > 0$ leży nieprzeliczalna część zbioru E (tj. mocy continuum, bo to zbiór Borela); $E \in \mathbf{M_2}$, gdy owa część ma miarę > 0; $E \in \mathbf{M_3}$ (można prościej, ale zrobione tak, żeby ująć i $\mathbf{M_4}$, gdzie nie da się uniknąć komplikacji – czy będę pamiętał te kilka kwantyfikatorów, choć sam wymyśliłem ten warunek, to wątpliwe, a nie chce mi się iść do szafy po odbitkę, ale spróbuję bez odbitki – gdy istnieją ciągi: zbiorów domkniętych $\{F_n\}$ i liczb $\{\eta_n\}$, $\eta_n \geqslant 0$, takich, że dla każdych $x \in F_n$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, takie że gdy $hh_1 > 0$, $|h + h_1| < \delta$, $\frac{h}{h_1} < \varepsilon$, to $\frac{|(x+h, x+h+h_1) \cap E|}{|h_1|} > \eta_n$ (w liczniku $|\cdot|$ oznacza miarę Lebesgue'a); tu przedział $(x+h, x+h+h_1)$ jest zapisany bez zwykłej umowy, że pierwsza liczba oznacza lewy koniec; tak jest gdy $h > 0$, gdy $h < 0$ odwrotnie, ale aby nie robić wyjątków w całej pracy się tej umowy nie stosuje). Nie założę się, czy tak, czy coś równoważnego, czy może całkiem źle – chcę tylko zaznaczyć złożoność warunku; $E \in \mathbf{M_4}$, gdy $E \in \mathbf{M_3}$ i dla każdego n, $\eta_n > 0$, $E \in \mathbf{M_5}$, gdy każdy $x \in E$ jest jego punktem gęstości. To zaś znaczy, że $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{|(x-h, x+h) \cap E|}{2h} = 1$.

Zob. np. [38].

Funkcję f zaliczam do klasy $\mathcal{M}_\mathbf{k}$, gdy dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiory $\{x : f(x) > a\}$ i $\{x : f(x) < a\}$ należą do $\mathbf{M_k}$. Przeciwnie niż dla zbiorów, udowadniam, że $\mathcal{M}_\mathbf{0} = \mathcal{M}_\mathbf{1} = \mathbf{J}$ (a przypomnijmy, że kl. $\mathbf{J}$ to jest I kl. Baire'a z war. Darboux), a więc klasa $\mathcal{M}_\mathbf{0}$ jest zbędna. Oczywiście $\mathcal{M}_\mathbf{k} \supset \mathcal{M}_\mathbf{k+1}$ i dla $k \geqslant 1$ jest to część właściwa, przeciwnie niż dla $k = 0$. Otóż udowodniłem tam, że klasa $\mathbf{M_4}$ dokładnie charakteryzuje zbiory $\{f'(x) > a\}$ (ewent. $< a$) dla pochodnej ograniczonej, dla $\{f'(x) > a\}$ ma to miejsce nawet tylko przy f' ograniczonych z góry – jest to jedno z dwóch najtrudniejszych twierdzeń tej pracy. Konieczność jeszcze znośna, ale wystarczalność, ładne kilka stron bez „wody”, bo wodę można dawać na wykładzie czy w nieudanym bo przewodnionym skrypcie (dla zaoczniaków, a wyobrażałem sobie, że przygotowanie zaoczniaków jest niemal zerowe – no to właśnie nie należy dawać za dużo wody, bo nieszczęśnicy będą wkuwać na pamięć i się zagubią); naprawdę dobrzy dydaktycy dają trochę wody nawet w podręcznikach dla normalnych studiów, np. Mostowski, ale musi jej być jak najmniej – ale prace drukowane pisałem bez wody. No, nawet dowód na jedną stronę bywa trudny (a na 10 stron może być łatwiejszy). Główny pomysł jest taki jak (w nieznanej mi bliżej) w pracy Carlesona o hipotezie Łuzina, choć pisałem ją dużo lat wcześniej, nie wiem, czy on ją czytał, zresztą nie opatentowałem tego pomysłu, bo to proste i może i przede mną ktoś stosował. Jest to analogia do podziałów np. majątku rolnego w kolejnych sprawach spadkowych, dla uproszczenia zawsze na połowy, ale z zachowaniem dwóch warunków: 1) nie wolno dzielić obszarów $\leqslant 4$ hektarów, 2) nie wolno dzielić, gdyby dochodowość, np. jakość gruntu choć jednej połówki po podziale spadła poniżej wyznaczonej z góry liczby stałej dla wszystkich podziałów. Wtedy po skończonej ilości podziałów obszar rozpadnie się na części na ogół nierówne polowo, takie że żadnej dzielić dalej nie wolno. U mnie tę zasadę podziału stanowi utrzymanie średniej gęstości danego zbioru powyżej pewnej liczby, u Carlesona coś bardziej złożonego, ale obaj dzielimy odcinki punktem środkowym na połowy. Można oczywiście zamiast dwóch rozpatrywać i więcej zakazów dzielenia, ale w tych pracach nie było to potrzebne. Później wynikają u mnie dwa oszacowania – jedno dla tych odcinków, gdzie drugi zakaz nie działał (maksymalna ilość podziałów, odcinki możliwie najkrótsze) i drugie, dla odcinków, które wcześniej przestały być dzielone – każdy z tych zbiorów może być pusty, ale nie oba. Co wynika u Carlesona – nie wiem, bo nie chcę czytać, aby nie utrudniać sobie pracy i bez tego wystarczająco trudnej. Żadne „prawo” nie zmusza mnie do jej robienia, ale chcę ją robić, zresztą od czerwca 1981 do października 1984 robiłem coś innego i to trudniejszego (chyba, bo starsze i nierozwiązane dotąd, choć to nie świadczy o większej trudności). Od października 1984 do lutego 1986 znowu szeregi trygonometryczne, a od lutego 1986 tamto drugie – na zmiany.

Co dalej jest w tej pracy? Twierdzenia, że f' skończona $\in \mathcal{M}_\mathbf{3}$, nieskończona w pewnych punktach $\in \mathcal{M}_\mathbf{2}$, ale i dla niej zbiory $\{a < f'(x) < b\}$ dla a i b zarówno skończonych, jak i niesk. są $\mathbf{M_3}$. A więc wszystkie warunki mocniejsze niż wcześniej znany $\mathcal{M}_\mathbf{1}$, ale to nie są jednak charakteryzacje, tylko warunki konieczne.

A co z $\mathcal{M}_\mathbf{5}$? Jest to charakteryzacja klasy $\mathcal{A}$ – funkcji aproksymatywnie ciągłych, które jak widać są I kl. Baire'a, oczywiście nie na odwrót. To dołączone dla kompletu, bo było znane – Maksimow chyba w 1936 w japońskim czasopiśmie Tôhoku Math. Journal. A czy pochodna ograniczona $\in \mathcal{M}_\mathbf{5}$? Jak widać nie musi. Czy na odwrót, funkcja $\in \mathcal{M}_\mathbf{5} = \mathcal{A}$ musi być pochodną? Jeśli jest ograniczona, tak, jeśli nieograniczona nie musi. Ponadto, przykład wzorowany na wspomnianym Lebesgue'a z $\sin \frac{1}{x}$ (dotyczył klasy $\mathbf{J}$, najszerszej) świadczy, że przynależność funkcji <u>ograniczonej</u> do klasy $\mathcal{M}_\mathbf{4}$ nie gwarantuje, że jest ona pochodną. Czyli $\mathcal{M}_\mathbf{4}$ nie stanowi charakteryzacji pochodnych ograniczonych, choć $\mathbf{M_4}$ stanowi charakteryzację zbiorów $\{f'(x) > a\}$ dla nich. Z tego wynika, że warstwami, dystrybuantą, czyli funkcjami $a \mapsto \{g(x) > a\}$ klasa pochodnych ograniczonych scharakteryzować się nie da, wiem od prof. Lipińskiego, że jakiś Amerykanin napisał, że w tej pracy stawiono problem takiej ich charakteryzacji. Nic podobnego, pytanie o klasę „$\mathcal{M}_{\mathbf{4\frac{1}{2}}}$” dotyczy jakiejś innej (nie wiem jakiej) charakteryzacji, że nie dystrybuantą, jest tam wyraźnie napisane. No bo (poprzestając na funkcjach ograniczonych) ich przynależność do $\mathcal{M}_\mathbf{5}$ wystarcza, aby były pochodnymi, ale nie jest konieczna – jest to warunek za mocny. Zaś przynależność do $\mathcal{M}_\mathbf{4}$ jest konieczna, ale nie wystarcza – warunek za słaby (i tu z ogr. $\mathcal{M}_\mathbf{4} \supset$ kl. pochod. ogr. $\supset \mathcal{M}_\mathbf{5}$ z ogr. oba zawierania właściwe). Neugebauer, Amerykanin, scharakteryzował wprawdzie pochodne (nie wiem, czy tylko ograniczone), ale jest to warunek niewiele różniący się od definicji pochodnej, czyli od warunku banalnego wspomnianego tu na początku. Widziałem, ale nie pamiętam, coś więcej o tym wie Lipiński (Uniw. Gdański). Ma być kl. pochod. ogr $= \mathcal{M}_{\mathbf{4\frac{1}{2}}}$ ogr. (bo funkcja $\in \mathcal{M}_\mathbf{5}$ ograniczona być nie musi, do $\mathcal{M}_\mathbf{4}$ też nie musi). Zbiorów $\mathbf{M}_{\mathbf{4\frac{1}{2}}}$ oczywiście nie potrzeba.

Jest to najbardziej wyczerpująca odpowiedź na Pana pytanie, jaką mogę dać. Zresztą od ponad 30 lat nie zajmuję się tą problematyką i w ogóle funkcjami rzeczywistymi. Zajmuję się szeregami trygonometrycznymi, a właściwie jednym problemem w nich – zbieżnością i to prawie wszędzie w zbiorze, zbieżnością w punkcie, mimo że zna-

Zob. punkt 6 informacji uzupełniających.

Wspomniane tu twierdzenie Neugebauera charakteryzujące pochodne (wraz z dowodem) i wiele więcej na ten temat znaleźć można np. w monografiach [14] oraz [25]. Zobacz również punkt 6 informacji uzupełniającej.

ne warunki są za mocne (wystarczające, ale nie konieczne), zajmować się nie warto, ona „ma miejsce, gdy ma miejsce”, przecież zbyt złożone warunki niewiele są warte. A czasem zajmuję się czymś innym dla odpoczynku, czy odmiany, a może i dlatego, że ten kot co jednej dziury pilnował, to zdechł.

Z poważaniem, Z.Z.

Kilka informacji uzupełniających (R.W.)

1. List profesora Zahorskiego znakomicie komponuje się z [61] (Zeszyt Naukowy powstał z okazji 70. rocznicy urodzin Profesora; zawiera m.in. biografię – którą zamieszczamy wraz z tłumaczeniem na język angielski także w niniejszej monografii – oraz spis artykułów Profesora; autorami prezentowanych tam prac jest zacne, międzynarodowe grono byłych studentów, kolegów oraz kontynuatorów idei Profesora; zdecydowanie cenna pozycja naukowa zasługująca na rozgłos); stanowi też autorskie spojrzenie na zagadnienia: klas Zahorskiego, twierdzenie Carlesona etc. Ponadto, list ten uzupełnia poglądy na podane kwestie innego polskiego autorytetu z dziedziny funkcji rzeczywistych – prof. Jana S. Lipińskiego, zamieszczone w [61] w jego artykule przeglądowym.

2. W roku 2007 obchodzono uroczyście trzysetną rocznicę urodzin L. Eulera. Stworzyło to nową okazję do studiowania jego dzieł. W związku z tym i nie tylko „w tym związku” zdecydowanie lepiej rozumiemy dziś metody dowodzenia tego genialnego matematyka. Ten zdawałoby się daleki od współczesnego formalizmu twórca (pisze o tym prof. Zahorski) w wielu momentach swojej twórczości przekłada się na język zupełnie dziś poprawny, czy to czysto formalny czy też z użyciem granic (dobrym przykładem tego zjawiska mogą tu być prace [1, 2, 6, 36, 37]).

3. Twierdzenie Banacha, wspomniane na marginesie strony 68, brzmi następująco:

   Zbiór tych $f \in C[0,1]$, dla których w każdym punkcie $x \in [0,1)$ mamy

   $$D_+ f(x) = -\infty \quad \textit{lub} \quad D^+ f(x) = \infty$$

   i równocześnie w każdym punkcie $x \in (0,1]$ mamy

   $$D_- f(x) = -\infty \quad \textit{lub} \quad D^- f(x) = \infty$$

   jest rezydualny.

   Włoski matematyk Pier Mario Gandini, w pracy [24], uogólnił to twierdzenie na przestrzenie $C([0,1]^n)$, dodatkowo, rozszerzając odpowiedni zbiór rezydualny do dopełnienia pewnego zbioru σ-porowatego.

4. Istnieje przynajmniej jeszcze jeden powód, dla którego warto wspomnieć o Gerhardzie Kowalewskim. Otóż, jest on autorem następującego twierdzenia o wartości średniej dla układu równań utworzonego z n całek.

Twierdzenie ([34]). *Niech* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}[a,b]$. *Istnieją liczby* $t_1, \ldots, t_n \in [a,b]$ *oraz nieujemne liczby rzeczywiste* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *takie, że:*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = b - a$$

oraz

$$\int_a^b x_r(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_r(t_k), \quad r = 1, \ldots, n.$$

W pracy [35] Kowalewski uogólnił to twierdzenie zastępując miarę liniową dt miarą wagową $F(t)dt$, gdzie $F \in \mathbb{C}[a,b]$, F jest stałego znaku na (a,b) oraz

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \int_a^b F(t)dt.$$

Dopiero w 2008 roku, Slobodanka Janković i Milan Merkle w pracy [31] rozszerzyli to twierdzenie na dowolne przedziały $I \subset \mathbb{R}$ wprowadzając w miejsce miary $F(t)dt$ dowolną skończoną dodatnią miarę μ określoną na σ-ciele borelowskim przedziału I (odpowiednio funkcje x_k należą wówczas do zbioru $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}(I) \cap L_\mu(I)$, $k = 1, \ldots, n$). Ponadto, jak zauważają ci autorzy, z wyjątkiem dwóch cytowań, wyniki Kowalewskiego pozostawały zupełnie nieznane – jakże niesłusznie. Powyższe wyniki wraz z dowodami przedstawiono również w książce [30].

5. Historia twierdzeń o jednoznaczności dla szeregów trygonometrycznych (wliczając w to również wielokrotne szeregi trygonometryczne) trwa nadal (zob. prace [3, 4, 5, 55, 59]). Warto tu wspomnieć jeszcze na nieco młodszy w stosunku do twierdzenia Cantora, wynik Du Bois Reymonda [13] z 1876 roku, cytowany i dowodzony zarówno w [59], jak i w [9]:

Twierdzenie A. *Jeśli szereg trygonometryczny*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$$

jest zbieżny wszędzie do sumy skończonej $f(x)$*, całkowalnej na* $[0, 2\pi]$*, to jest on szeregiem Fouriera funkcji* $f(x)$*.*

Zwróćmy uwagę (za Niną Bari [9]), że oryginalnie, Du Bois Reymond, odnosił ten wynik do całkowalności w sensie Riemanna (jego wynik pozostawał w mocy także w przypadku, gdy zaniedbamy zbieżność szeregu trygonometrycznego na pewnym zbiorze przeliczalnym). Stosowne rozszerzenie twierdzenia A na funkcje całkowalne w sensie Lebesgue'a zawdzięczamy samemu Lebesgue'owi (ale twierdzenie A nadal nosi nazwę twierdzenia Du Bois Reymonda). Jest oczywiste, że twierdzenie A implikuje dyskutowany tu wynik Cantora z 1870 roku.
Na zakończenie wspomnijmy jeszcze, że podobne twierdzenia o jednoznaczności dla szeregów Haara i Walsha dyskutowali i rozstrzygnęli m.in. Rosjanie W.A. Skwor-

cow (zob. [50, 51, 52]) oraz M.G. Płotnikow (zob. [42, 43, 44]). Temat jednoznaczności wielokrotnych szeregów trygonometrycznych dyskutowany jest też w rozdziale trzecim monografii V.L. Shapiro [49].

6. W klasie funkcji ograniczonych $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ charakteryzacji pochodnych dokonał, wspomniany w końcówce listu profesora, I. Maximoff (zob. [40, 41]):

   Twierdzenie B. *Funkcja ograniczona $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ jest równoważna w sensie Lebesgue'a pochodnej wtedy i tylko wtedy, gdy f jest I klasy Baire'a i równocześnie spełnia warunek Darboux.*

   Twierdzenie to wraz z pięknym dowodem bazującym na koncepcji Davida Preissa znaleźć można w rozdziale czwartym monografii [25]. Nomen omen dowód ten wykorzystuje efektywnie, napomknięte w liście profesora twierdzenie Neugebauera charakteryzujące pochodne (ograniczone). Autorzy monografii [25] kwestionują też poprawność oryginalnego, tj. podanego przez I. Maximoffa dowodu twierdzenia B (jeśli jest to prawda, to autorem pierwszego poprawnego dowodu tego twierdzenia byłby wspomniany już D. Preiss).
   Ponadto, jak wykazano w [25] za Goffmanem i Neugebauerem charakteryzacja z twierdzenia B zachodzi też w obrębie klasy funkcji ograniczonych $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, równoważnych w sensie Lebesgue'a pochodnej aproksymatywnej.
   Więcej przekrojowych informacji poświęconych charakteryzacjom pochodnych znaleźć można w pracach [15, 23] oraz [19]. Zwłaszcza w tej ostatniej znaleźć można następujący ciekawy wynik Krzysztofa Chrisa Ciesielskiego [19, 53]:

   Twierdzenie C. *Żadna z następujących klas funkcyjnych nie jest topologizowalna: klasa Λ wszystkich pochodnych klasy Zahorskiego $\mathcal{M}_k$, $k = 1, ..., 5$, klasa wszystkich funkcji spełniających warunek Darboux, klasa wszystkich funkcji mierzalnych oraz klasa wszystkich funkcji mających własność Baire'a.*

Bibliografia

1. Andrews G.A.: *Euler's „De Partitio Numerorum"*. Bull. Amer. Math. Soc. **44** (2007), 561–573.
2. Apostol T.M.: *An elementary view of Euler's Summation Formula.* Amer. Math. Monthly **106** (1999), 409–418.
3. Ash J.M., Rieders E., Kaufman R.P.: *The Cantor – Lebesgue property.* Israel J. Math. **84** (1993), 179–191.
4. Ash J.M.: *Uniqueness of representation by trigonometric series.* Amer. Math. Monthly **96** (1989), 873–885.
5. Ash J.M.: *Uniqueness for higher dimensional trigonometric series.* Cubo **4** (2002), 97–120.
6. Ayoub R.: *Euler and the Zeta function.* Amer. Math. Monthly **81** (1974), 1067–1086.
7. Banach S.: *Sur les ensembles de points oú la dérivée est infinie.* Comptes Rendus de l'Académie de Sciences **173** (1921), 457–459.
8. Bari N.K.: *The problem of uniqueness of expansion of a function into a trigonometric series.* Uspekhi Mat. Nauk **4**, no. 3 (1949), 3–68 (in Russian).
9. Bary N.K.: *A Treatise on Trigonometric Series*, vol. 1 and 2. Pergamon Press, New York 1964.
10. Benedetto J.J.: *Harmonic Analysis and Applications.* CRC Press, Boca Raton 1997.
11. Benedetto J.J., Czaja W.: *Integration and Modern Analysis.* Birkhäuser, Boston 2009.
12. Bochner S.: *Fourier series came first.* Amer. Math. Monthly **86** (1979), 197–199.

13. Du Bois Reymond P.: *Beweis dass die koeffizienten der trigonometrischen Rechen. . .* Abh. Akad. Wiss. München **12** (1876), 117–166.
14. Bruckner A.M.: *Differentiation of Real Functions*. Springer, Berlin 1978.
15. Bruckner A.M.: *The problem of characterizing derivatives revisited*. Real Anal. Exchange **21** (1995–96), 112–133.
16. Bruckner A.M., Leonard J.L.: *Derivatives*. Amer. Math. Monthly **73** (1966), 24–56.
17. Bruckner A.M., Thomson B.S.: *Real variable contribution of G.C. Young and W.H. Young*. Expo. Math. **19** (2001), 337–358.
18. Carleson L.: *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*. Acta Math. **116** (1966), 135–157.
19. Ciesielski K.: *Set theoretic real analysis*. J. Appl. Anal. **3** (1997), 143–190.
20. Coppel W.A.: *J.B. Fourier – On the occasion of his two hundredth birthday*. Amer. Math. Monthly **76** (1969), 468–483.
21. Djaczenko M.J.: *Some problems of the theory of multiple trigonometric series*. Uspiekhi Mat. Nauk **47** (1992), 97–162.
22. Feffermann C.: *Pointwise convergence of Fourier series*. Ann. of Math. (2) **98**, no. 3 (1973), 551–571.
23. Freiling Ch.: *On the problem of characterizing derivatives*. Real Anal. Exchange **23**, no. 2 (1997-1998), 805–812.
24. Gandini P.M.: *An extension of a theorem of Banach*. Arch. Math. **67** (1996), 211–216.
25. Goffman C., Nishiura T., Waterman D.: *Homeomorphisms in Analysis*. Amer. Math. Soc., Providence 1997.
26. Grafakos L.: *Modern Fourier Analysis*. Springer, Berlin 2009.
27. Hahn H.: *Über den Fundamentalsatz der Integralrechnung*. Monatsh. Math. Phys **16** (1905), 161–166.
28. Halmos P.R.: *Fourier series*. Amer. Math. Monthly **85** (1978), 33–34.
29. Hetmaniok E., Pleszczyński M., Wituła R.: *Selected scientific achievements of Professor Zygmunt Zahorski*. In this monograph: *Monograph on the occasion of* 100^{th} *birthday anniversary of Zygmunt Zahorski*, Wituła R., Słota D., Hołubowski W. (eds.), Wyd. Pol. Śl., Gliwice 2015, 45–49.
30. Hetmaniok E., Słota D., Wituła R.: *Mean Value Theorems*. Silesian University of Technology Press, Gliwice 2012 (in Polish).
31. Janković S., Merkle M.: *A mean value theorem for systems of integrals*. J. Math. Anal. Appl. **142** (2008), 334–339.
32. Kechris A.S., Louveau A.: *Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **128**, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1987.
33. Kolmogoroff A.: *Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout*. Fund. Math. **4** (1923), 324–328.
34. Kowalewski G.: *Ein Mittelwertsatz für ein System von n Integralen*. Z. Math. Phys. (Schlömilch Z.) **42** (1895), 153–157.
35. Kowalewski G.: *Bemerkungen zu dem Mittelwertsatze für ein System von n Integralen*. Z. Math. Phys. (Schlömilch Z.) **43** (1896), 118–120.
36. Laugwitz D., Rodewald B.: *A simple characterization of the Gamma Function*. Amer. Math. Monthly **94** (1987), 534–536.
37. Laugwitz D.: *On the historical development of infinitesimal mathematics*. Amer. Math. Monthly **104** (1997), 447–455.
38. Łojasiewicz S.: *Introduction to Real Functions Theory*. PWN, Warsaw 1973 (in Polish).
39. Luzin N.N.: *Integral and trigonometric series*, editing and comments – N.K. Bari and D.E. Menshov. Goztiechizdat, Moscow 1951 (in Russian).
40. Maximoff J.: *On continuous transformation of some functions into an ordinary derivative*. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa **12** (1943), 147–160.
41. Maximoff J.: *Sur les fonctions dérivées*. Bull. Sci. Math. **64** (1940), 116–121.
42. Plotnikov M.G.: *On uniqueness sets for multiple Walsh series*. Mat. Zametki **81**, no. 2 (2007), 265–279 (English transl. in Math. Notes **81**, no. 1–2 (2007), 234–246).
43. Plotnikov M.G.: *Several properties of generalized multivariete integrals and theorems of the du Bois-Reymond type for Haar series*. Sb. Math. **198**, no. 7 (2007), 967–991.

44. Plotnikov M.G.: *Quasi-measures, Hausdorff p-measures and Walsh and Haar series.* Izv. RAN: Ser. Mat. **74**, no. 4 (2010), 157–188 (English transl. in Izv. Math. **74**, no. 4 (2010), 819–848).
45. Ruziewicz S.: *On unapplicability of the fundamental theorem of integral calculus for functions possessing the infinite derivatives.* Mathematical-Physical Works **31** (1920), 31–33 (in Polish).
46. Ruziewicz S.: *Sur les fonctions qui ont la même dérivée et dont la différence n'est pas constante.* Fund. Math. **1** (1920), 148–151.
47. Saks S.: *Theory of the Integral.* Dover Publications, New York 1937 (1933).
48. Saks S.: *Zarys teorii całki.* Wyd. Kasy im. Mianowskiego, Warsaw 1930.
49. Shapiro V.L.: *Fourier Series in Several Variables with Applications to Partial Differential Equations.* CRC Press, Boca Raton 2011.
50. Skvortsov V.A.: *On uniqueness theorem for a multidimensional Haar series.* Izv. Akad. Nauk. Arm. SSR Mat. **23**, no. 3 (1988), 293–296 (English transl. in Soviet. J. Contemp. Math. Anal. **23**, no. 3 (1988), 104–108).
51. Skvortsov V.A.: *Uniqueness sets for multiple Haar series.* Mat. Zametki **14**, no. 6 (1973), 789–798 (English transl. in Math. Notes **14**, no. 6 (1973), 1011–1016).
52. Skvortsov V.A., Talalyan A.A.: *Some uniqueness questions of multiple Haar and trigonometric series.* Mat. Zametki **46**, no. 2 (1989), 104–113 (English transl. in Math. Notes **46**, no. 2 (1989), 646–653).
53. Tartaglia M.: *Sulla caratterizzazione delle derivate.* Pubbl. Dip. Mat. Stat., Napoli 1988.
54. Tong J., Hochwald S.: *An application of the Darboux property of derivatives.* Int. J. Math. Edu. Sci. Technology **34** (2003), 150–153.
55. Uljanow P.L.: *A.N. Kolmogorov and divergent Fourier series.* Uspiekhi Mat. Nauk **38** (1983), 51–90.
56. Zahorski Z.: *Sur la première dérivée.* Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 1–54.
57. Zahorski Z.: *On the set of not-differentiability points of any function.* Report on the V Congress of Polish Mathematicians in Kraków, 29-31 of May 1947. Supplement to the PTM Annual **21** (1949), 23–26.
58. Zahorski Z.: *Une série de Fourier permutée d'une fonction de classe L^2 divergente presque partout.* C. R. Acad. Sci. Paris **251** (1960), 501–503.
59. Zygmund A.: *Trigonometric Series*, vol. I. Cambridge Univ. Press, 1959 (Russian transl. was used, Mir Press, Moscow 1965, edited by N.K. Bari).
60. Zygmund A.: *Notes on the history of Fourier series, Studies in harmonic analysis.* Studies in Mathematics **13**, J.M. Ash (ed.), Math. Assoc. of America (1976), 1–19.
61. Zeszyty Nauk. P.Śl., ser. Mat.-Fiz **48**, Gliwice 1986.